

Questions du cours. (Sur les séries de Fourier) (4,5 pts)

- 1) (2 pts) Enoncer le Théorème de Dirichlet OU le Théorème de Jordan.
- 2) (1 pt) Donner les expressions des coefficients d'une série de Fourier associée à une fonction  $f$  (On suppose  $f$   $2\pi$ -périodique)
- 3) (1,5 pt) Enoncer le théorème qui donne l'Egalité de Parseval.

Exercice 1. (Sur les séries numériques) (6 pts)

Soient deux séries numériques de termes généraux définies par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \quad \forall n \geq 2.$$

- 1) (1 pt) Montrer que la série  $\sum u_n$  est convergente.
- 2) (2 pts) On pose  $w_n = u_n - v_n$ ,  $n \geq 2$ . Quelle est la nature de la série numérique  $\sum w_n$  ?
- 3) (0,5 pt) En déduire la nature de la série  $\sum v_n$ .
- 4) (2,5) Etudier la nature de la série de terme général  $t_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ ,  $n \geq 2$ , avec  $\alpha > 0$ .

Exercice 2 (Sur les séries entières) (4 pts)

- 1) (1 pt) Vérifier que la fonction définie par  $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$  est solution de l'équation différentielle

$$(1 - x^2) y' - xy = 1 \quad (*)$$

- 2) (2 pts)  $f$  est développable en séries entières. En utilisant l'équation (\*), donner le développement en série entière de la fonction  $f$ . (Indication : remarquer que  $f$  est impaire. Trouver la relation de récurrence qui lie les coefficients de la série entière et vérifier que  $a_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ )

- 3) (1 pt) Calculer le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice 3 (Sur les séries de fonctions) (5,5 pts)

Soit  $I = ]1, +\infty[$ . Pour  $x \in I$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ .

- 1) (1 pt) Montrer que  $f$  est définie sur  $I$ .
- 2) a) (1 pt) Montrer que  $\forall a > 1$ , la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ .  
b) (1 pt) En déduire que  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$  est continue sur  $I$ .
- 3) a) (1,5 pts) Montrer que  $\forall a > 1$ , la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ . (Indication. Vérifier que la fonction  $x \mapsto |f'_n(x)|$  est décroissante sur  $[a, +\infty[$ )  
b) (1 pt) En déduire que  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$  est classe  $C^1$  sur  $I$ .





ETU SUP.com

Programme  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
**Exercices**  
Contrôles Continus  
Langues  
Thermodynamique  
Multimedia  
**Divers**  
Economie  
Travaux Dirigés  
Chimie Organique  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Algèbre  
Corrigés  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..